Cours Complet d'Algèbre Linéaire : Des Fondations aux Endomorphismes

Loïc PORTOIS

2024-2025

1 Introduction

L'algèbre linéaire est une branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels, les transformations linéaires et les systèmes d'équations linéaires. Elle est fondamentale dans de nombreux domaines scientifiques et techniques, offrant des outils puissants pour modéliser et résoudre une vaste gamme de problèmes. Ce cours vise à présenter de manière détaillée et précise plusieurs concepts clés de l'algèbre linéaire, en partant des notions de base jusqu'à l'étude des endomorphismes et des changements de base.

2 Chapitre 0 : Prérequis sur les Matrices

Avant d'aborder les espaces vectoriels en détail, il est utile de maîtriser l'outil fondamental que sont les matrices.

2.1 0.1 Définition d'une Matrice

Une **matrice** à m lignes et n colonnes (dite de taille ou de dimension $m \times n$) à coefficients dans un corps K (par exemple $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) est un tableau rectangulaire de nombres.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Le coefficient a_{ij} est l'élément situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne. On note aussi $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$. L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans K est noté $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

- Si $m = n$, la matrice est dite **carrée** d'ordre n. $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ est noté $\mathcal{M}_n(K)$.
- Une matrice ligne est une matrice $1 \times n$.
- Une matrice colonne est une matrice $m \times 1$.

2.2 0.2 Opérations sur les Matrices

2.2.1 0.2.1 Addition de Matrices

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times n$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2.2.2 0.2.2 Multiplication par un Scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $m \times n$ et $\lambda \in K$ un scalaire. Le produit λA est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times n$ définie par $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

2.2.3 0.2.3 Produit Matriciel

Soit $A = (a_{ik})$ une matrice de taille $m \times p$ et $B = (b_{kj})$ une matrice de taille $p \times n$. Leur produit $C = AB$ est une matrice de taille $m \times n$ dont le coefficient c_{ij} est donné par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}.$$

Le produit matriciel AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. **Attention** : En général, $AB \neq BA$. Le produit matriciel n'est pas commutatif.

2.3 0.3 Déterminant d'une Matrice Carrée

Le déterminant est un nombre associé à une matrice carrée qui fournit de nombreuses informations sur celle-ci, notamment sur son inversibilité. On note $\det(A)$ ou $|A|$.

2.3.1 0.3.1 Cas Particuliers

- **Matrice** 1×1 : Si $A = (a_{11})$, alors $\det(A) = a_{11}$.
- **Matrice** 2×2 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = ad - bc$.
- **Matrice** 3×3 **(Règle de Sarrus)** : Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$,

  $$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

  (Cette règle visuelle ne s'applique qu'aux matrices 3×3).

2.3.2 0.3.2 Définition Générale (Développement par rapport à une ligne ou une colonne)

Pour une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n, on définit :

- Le **mineur** M_{ij} du coefficient a_{ij} comme le déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
- Le **cofacteur** C_{ij} de a_{ij} comme $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Le déterminant de A peut être calculé en développant par rapport à n'importe quelle ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}.$$

Ou en développant par rapport à n'importe quelle colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}.$$

Exemple pour une matrice 3×3 *(développement par rapport à la première ligne)* :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

2.3.3 0.3.3 Propriétés des Déterminants

- $\det(I_n) = 1$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
- Si A a une ligne ou une colonne de zéros, alors $\det(A) = 0$.
- Si A a deux lignes (ou deux colonnes) identiques, alors $\det(A) = 0$.
- Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) de A, le déterminant est multiplié par -1.
- Si on multiplie une ligne (ou une colonne) de A par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ. Conséquence : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne (ou chaque colonne).
- Si on ajoute à une ligne (ou une colonne) un multiple d'une autre ligne (ou colonne), le déterminant ne change pas. (Très utile pour faire apparaître des zéros avant de développer).
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$, où A^T est la transposée de A.
- Pour une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), le déterminant est le produit des éléments de sa diagonale principale.

2.3.4 0.3.4 Matrice Inversible et Déterminant

Théorème : Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

2.4 0.4 Utilisation des Matrices

Les matrices sont utilisées pour :

- Représenter et résoudre des systèmes d'équations linéaires. Un système $AX = B$ a une solution unique si A est carrée et $\det(A) \neq 0$. La solution est $X = A^{-1}B$.
- Représenter des transformations linéaires (applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie), comme nous le verrons en détail.
- En géométrie, pour représenter des rotations, des translations (avec coordonnées homogènes), des projections.
- En informatique (graphisme, traitement d'images), en physique, en économie, etc.

3 Chapitre 1 : Espaces Vectoriels et Sous-Espaces Vectoriels

3.1 1.1 Rappels sur les Espaces Vectoriels

Un **espace vectoriel** sur un corps K (généralement $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) est un ensemble E muni de deux lois :

- Une loi de composition interne, appelée addition de vecteurs, notée $+ : E \times E \to E$.
- Une loi de composition externe, appelée multiplication par un scalaire, notée $\cdot : K \times E \to E$.

Ces lois doivent satisfaire un certain nombre d'axiomes (associativité, commutativité de l'addition, existence d'un vecteur nul $\vec{0}_E$, existence de l'opposé d'un vecteur, distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition des vecteurs et des scalaires, etc.). Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de K sont appelés **scalaires**.

Des exemples courants incluent $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{R}_n[X]$ pour ceux de degré au plus n), l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle, etc.

3.2 1.2 Sous-Espaces Vectoriels

Souvent, nous étudions des sous-ensembles d'un espace vectoriel qui héritent de sa structure.

3.2.1 1.2.1 Définition

Un sous-ensemble non vide F d'un espace vectoriel E (sur un corps K) est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de E si F, muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies sur E (restreintes à F), est lui-même un espace vectoriel sur K.

3.2.2 1.2.2 Caractérisation et Démonstration

Pour démontrer qu'un sous-ensemble $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E, il n'est pas nécessaire de vérifier tous les axiomes d'un espace vectoriel. On utilise une caractérisation plus simple.

Méthode Standard (3 conditions) : F est un s.e.v. de E si et seulement si :

1. F **est non vide** : Le plus simple est de vérifier que le vecteur nul de E appartient à F : $\vec{0}_E \in F$.
2. F **est stable par addition** : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in F$, leur somme $\vec{u} + \vec{v}$ appartient également à F.
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \quad \vec{u} + \vec{v} \in F.$$
3. F **est stable par multiplication par un scalaire** : Pour tout vecteur $\vec{u} \in F$ et pour tout scalaire $\lambda \in K$, le produit $\lambda \cdot \vec{u}$ appartient également à F.
$$\forall \vec{u} \in F, \forall \lambda \in K, \quad \lambda \cdot \vec{u} \in F.$$

Remarque importante : La condition $\vec{0}_E \in F$ est cruciale. Si elle n'est pas vérifiée, F ne peut pas être un s.e.v.

Méthode Condensée (2 conditions) : F est un s.e.v. de E si et seulement si :

1. F **est non vide** : $\vec{0}_E \in F$.

2. F **est stable par combinaison linéaire** : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et pour tous scalaires $\lambda, \mu \in K$, la combinaison linéaire $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ appartient à F.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \forall \lambda, \mu \in K, \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F.$$

(On peut aussi utiliser la forme $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \forall \lambda \in K, \quad \vec{u} + \lambda\vec{v} \in F$, qui est équivalente si la première condition $\vec{0}_E \in F$ est vérifiée).

Étapes Pratiques pour la Démonstration :

1. Identifier l'espace vectoriel "parent" E et le corps K.
2. Définir clairement le sous-ensemble F à étudier.
3. **Vérifier que** $\vec{0}_E \in F$. (Si non, F n'est pas un s.e.v.).
4. **Vérifier la stabilité par combinaison linéaire** :
   - Prendre $\vec{u}, \vec{v} \in F$ (ils vérifient donc les conditions de F) et $\lambda, \mu \in K$.
   - Montrer que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ vérifie les conditions de F, et donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.
5. Conclure.

3.2.3 1.2.3 Exemples et Contre-exemples

- **Exemples de s.e.v.** :
  - $\{\vec{0}_E\}$ (le s.e.v. nul) et E lui-même sont toujours des s.e.v. de E.
  - Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ (un plan passant par l'origine, ou une droite si deux des a, b, c sont nuls, ou l'origine si $a = b = c = 0$ n'est pas le cas).
    * $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ car $a(0) + b(0) + c(0) = 0$.
    * Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in F$. Donc $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ et $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$.

    $$\begin{aligned} &a(\alpha x_1 + \beta x_2) + b(\alpha y_1 + \beta y_2) + c(\alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1) + \beta(ax_2 + by_2 + cz_2) \\ &= \alpha(0) + \beta(0) = 0. \end{aligned}$$

    Donc $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F$.
  - L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires **homogènes**.
  - $\text{Vect}(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p})$, le sous-espace engendré par une famille de vecteurs.
- **Contre-exemples (ensembles qui ne sont PAS des s.e.v.)** :
  - $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$. Ne contient pas $(0, 0)$.
  - $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. Contient $(1, 0)$ et $(0, 1)$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$.
  - $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. Contient $(1, 0)$, mais $(-1)(1, 0) = (-1, 0) \notin F$.

4 Chapitre 2 : Familles de Vecteurs, Bases et Dimension

4.1 2.1 Familles Génératrices

Définition : Une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p})$ de E est dite **génératrice** de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\forall \vec{u} \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in K^p \text{ tel que } \vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v_i}.$$

On note alors $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

4.2 2.2 Familles Libres et Familles Liées

4.2.1 2.2.1 Définition d'une Famille Libre

Définition : Une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p})$ de E est dite **libre** (ou **linéairement indépendante**) si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul est celle où tous les scalaires sont nuls.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v_i} = \vec{0}_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

4.2.2 2.2.2 Définition d'une Famille Liée et Propriétés

Définition : Une famille $\mathcal{F}$ est dite **liée** (ou **linéairement dépendante**) si elle n'est pas libre. Cela signifie qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v_i} = \vec{0}_E$.

Propriétés des familles liées :

- Dans une famille liée d'au moins deux vecteurs, au moins un des vecteurs peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres.
- Toute famille contenant le vecteur nul $\vec{0}_E$ est liée (si $\vec{v_1} = \vec{0}_E$, alors $1 \cdot \vec{v_1} + 0 \cdot \vec{v_2} + \cdots = \vec{0}_E$).
- Une famille de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si et seulement si les vecteurs sont colinéaires (c'est-à-dire $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta \vec{u}$ pour un scalaire α ou β).
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

4.3 2.3 Bases d'un Espace Vectoriel

4.3.1 2.3.1 Définition

Définition : Une famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n})$ de E est une **base** de E si elle est à la fois **libre** et **génératrice** de E.

Intuition : Une base est un ensemble minimal de "briques" (vecteurs) permettant de construire tous les autres vecteurs de l'espace, et ce, de manière unique.

Exemple : Base Canonique de $\mathbb{R}^n$
Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $\mathcal{B}_c = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ où $\vec{e_i}$ est le vecteur avec un 1 à la i-ième position et des 0 ailleurs, est la base canonique. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)$.

4.3.2 2.3.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Théorème : Si $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ est une base de E, alors tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit de manière **unique** comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\vec{u} = x_1\vec{b_1} + x_2\vec{b_2} + \cdots + x_n\vec{b_n}.$$

Les scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $Coord_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ ou $(\vec{u})_{\mathcal{B}}$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

4.4 2.4 Dimension d'un Espace Vectoriel

4.4.1 2.4.1 Théorème de la dimension

Théorème (admis) : Si un espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}_E\}$ admet une base finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de E, notée $\dim(E)$. Par convention, $\dim(\{\vec{0}_E\}) = 0$. Si E n'admet pas de base finie, $\dim(E) = \infty$.

4.4.2 2.4.2 Propriétés en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n = \dim(E)$.

- Toute famille libre de E a au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.
- Une famille libre de n vecteurs de E est une base de E.
- Une famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

4.5 2.5 Comment trouver une base ?

- **Pour un s.e.v. défini par des équations (comme un noyau)** : Résoudre le système, exprimer les solutions en fonction de paramètres. Les vecteurs associés aux paramètres forment une base du s.e.v.
- **Pour un s.e.v. engendré par une famille Vect**$(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$: Utiliser la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes (ou lignes) formées par les coordonnées des $\vec{v_i}$ pour extraire une sous-famille libre maximale.

5 Chapitre 3 : Applications Linéaires

5.1 3.1 Définition d'une Application Linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (additivité).
2. $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in E$ et tout $\lambda \in K$ (homogénéité).

Ces deux conditions sont équivalentes à la seule condition :

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \text{ pour tous } \vec{u}, \vec{v} \in E \text{ et tous } \lambda, \mu \in K.$$

Une conséquence directe est que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

5.2 3.2 Noyau d'une Application Linéaire

5.2.1 3.2.1 Définition

Le **noyau** de l'application linéaire $f : E \to F$, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul $\vec{0}_F$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$$

5.2.2 3.2.2 Le noyau comme sous-espace vectoriel

Théorème : $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Démonstration :

1. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, donc $\vec{0}_E \in \mathrm{Ker}(f)$. Ker(f) est non vide.
2. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda, \mu \in K$.

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \quad \text{(par linéarité de } f) \\ &= \lambda\vec{0}_F + \mu\vec{0}_F = \vec{0}_F. \end{aligned}$$

   Donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E.

5.2.3 3.2.3 Noyau et injectivité

Théorème : Une application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

5.2.4 3.2.4 Comment déterminer le noyau ?

- **Si f est définie explicitement** (par ex. $f(x, y, z) = (x - y, 2z)$) : Résoudre $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$.
  Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y, 2z)$.

$$f(x, y, z) = (0, 0) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}.$$

  Les vecteurs du noyau sont de la forme $(x, x, 0) = x(1, 1, 0)$. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$.
- **Si f est donnée par une matrice** A (voir Chapitre 4) : Résoudre le système linéaire homogène $AX = 0$.

5.3 3.3 Image d'une Application Linéaire

Définition : L'**image** de l'application linéaire $f : E \to F$, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des images par f des vecteurs de E.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in E\} = \{\vec{w} \in F \mid \exists \vec{u} \in E, \vec{w} = f(\vec{u})\}.$$

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. Si $\mathcal{B}_E = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\vec{e_1}), \ldots, f(\vec{e_n}))$. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

5.4 3.4 Théorème du Rang

Théorème : Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec E de dimension finie. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est appelée le **rang** de f, noté $\mathrm{rg}(f)$.

6 Chapitre 4 : Endomorphismes et leur Représentation Matricielle

6.1 4.1 Endomorphismes

6.1.1 4.1.1 Définition

Un **endomorphisme** d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans lui-même ($f : E \to E$). L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ ou $\text{End}(E)$.

6.1.2 4.1.2 Comment démontrer qu'une application est un endomorphisme (focus sur $\mathbb{R}^n$)

Pour montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, il faut vérifier deux choses :

1. **L'application va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$** : Ceci est généralement clair par la définition de f. L'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ doit être un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (avoir n composantes réelles).
2. **L'application est linéaire** : Vérifier que $f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - 2y, 3x + y)$.

1. L'image $f(x, y)$ est bien un couple de réels, donc un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. Linéarité : Soient $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)$.

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) &= ((\alpha x_1+\beta x_2) - 2(\alpha y_1+\beta y_2), 3(\alpha x_1+\beta x_2) + (\alpha y_1+\beta y_2)) \\ &= (\alpha(x_1 - 2y_1) + \beta(x_2 - 2y_2), \alpha(3x_1 + y_1) + \beta(3x_2 + y_2)) \\ &= \alpha(x_1 - 2y_1, 3x_1 + y_1) + \beta(x_2 - 2y_2, 3x_2 + y_2) \\ &= \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}). \end{aligned}$$

   Donc f est linéaire.

Puisque $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

6.2 4.2 Matrice d'un Endomorphisme (en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

6.2.1 4.2.1 Définition et construction

La **matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$**, notée $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ ou A, est la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ième colonne est formée par les coordonnées du vecteur $f(\vec{e_j})$ dans la base $\mathcal{B}$. Si $f(\vec{e_j}) = a_{1j}\vec{e_1} + a_{2j}\vec{e_2} + \cdots + a_{nj}\vec{e_n}$, alors

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6.2.2 4.2.2 Utilité

- **Calcul de l'image d'un vecteur** : Si $\vec{u} \in E$ a pour coordonnées $X = (\vec{u})_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$, alors son image $f(\vec{u})$ a pour coordonnées $Y = (f(\vec{u}))_{\mathcal{B}} = AX$.

- **Composition d'endomorphismes** : Si $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}}(g)$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(g \circ f) = B \times A$.

6.2.3 4.2.3 Lien entre les propriétés de f et de $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$

- Ker(f) : Les vecteurs $\vec{u}$ de Ker(f) sont ceux dont le vecteur de coordonnées X vérifie $AX = 0$. La dimension de Ker(f) est la dimension de l'espace des solutions de ce système.
- Im(f) : Im(f) est l'espace engendré par les vecteurs colonnes de A (interprétés comme coordonnées dans $\mathcal{B}$).
- $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$ (rang de la matrice A).
- f est injective $\iff$ $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ $\iff$ $AX = 0$ a pour unique solution $X = 0$.
- f est surjective $\iff$ $\text{rg}(f) = n$.
- f est bijective (automorphisme) $\iff$ A est inversible ($\det(A) \neq 0$). Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.
- Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

7 Chapitre 5 : Changement de Bases

7.1 5.1 Matrice de Passage

7.1.1 5.1.1 Définition et propriétés

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une "ancienne" base et $\mathcal{B}' = (\vec{e'_1}, \dots, \vec{e'_n})$ une "nouvelle" base de E. La **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$**, notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ (ou simplement P), est la matrice dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées du vecteur $\vec{e'_j}$ (de la nouvelle base) dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Cette matrice est toujours inversible, et son inverse est $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}$.

7.1.2 5.1.2 Expression des coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base

Soit $\vec{u} \in E$. Notons $X = (\vec{u})_{\mathcal{B}}$ ses coordonnées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$, et $X' = (\vec{u})_{\mathcal{B}'}$ ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. La relation est donnée par :

$$X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}X'$$

Et donc, pour trouver les nouvelles coordonnées à partir des anciennes :

$$X' = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}X = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}X.$$

7.2 5.2 Changement de Base pour la Matrice d'un Endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans l'ancienne base $\mathcal{B}$. Soit $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. Soit $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

7.2.1 5.2.1 Formule de changement de base

La relation entre A et A' est :

$$A' = P^{-1}AP$$

Justification rapide : Soit $\vec{u}$ un vecteur. $X = (\vec{u})_{\mathcal{B}}$, $X' = (\vec{u})_{\mathcal{B}'}$. $Y = (f(\vec{u}))_{\mathcal{B}}$, $Y' = (f(\vec{u}))_{\mathcal{B}'}$. On a $Y = AX$ et $Y' = A'X'$. On sait que $X = PX'$ et $Y = PY'$. Donc $PY' = A(PX')$, ce qui donne $Y' = P^{-1}APX'$. Comme $Y' = A'X'$, on identifie $A' = P^{-1}AP$.

7.2.2 5.2.2 Matrices semblables

Deux matrices carrées A et A' sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$. Les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables.

7.3 5.3 Changement de Base pour les Polynômes

Les polynômes forment des espaces vectoriels. Par exemple, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

7.3.1 5.3.1 Espaces vectoriels de polynômes et leurs bases

- La **base canonique** de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Sa dimension est $n + 1$.
- D'autres familles de polynômes peuvent former des bases. Par exemple, pour $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\mathcal{B}' = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base (famille de $3 = (2 + 1)$ polynômes de degrés échelonnés, donc libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$).

7.3.2 5.3.2 Exprimer un polynôme dans une nouvelle base

Soit $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, alors ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ sont $(a_0, a_1, \dots, a_n)^T$. Pour trouver ses coordonnées $(a'_0, a'_1, \dots, a'_n)^T$ dans une nouvelle base $\mathcal{B}' = (P_0(X), P_1(X), \dots, P_n(X))$, on doit résoudre l'équation :

$$P(X) = a'_0P_0(X) + a'_1P_1(X) + \cdots + a'_nP_n(X).$$

Cela peut se faire :

1. En identifiant les coefficients des puissances de X de part et d'autre (conduit à un système linéaire).
2. En utilisant la formule de changement de base $X' = P^{-1}X$, où X sont les coordonnées dans $\mathcal{B}_c$, X' les coordonnées dans $\mathcal{B}'$, et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}'$ (les colonnes de P sont les coordonnées des polynômes $P_j(X)$ dans la base $\mathcal{B}_c$).

Exemple : Soit $P(X) = 2 + 3X + X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

Base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$. Coordonnées de P dans $\mathcal{B}_c$: $X_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nouvelle base $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ avec $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X - 1$, $P_2(X) = (X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$.

Matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}'}$:

$P_0(X) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \implies Col_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P_1(X) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \implies Col_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P_2(X) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot X + 1 \cdot X^2 \implies Col_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On calcule P^{-1}. Comme P est triangulaire supérieure, son inverse l'est aussi.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées X'_P de $P(X)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $X'_P = P^{-1}X_P$:

$$X'_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(2) + 1(3) + 1(1) \\ 0(2) + 1(3) + 2(1) \\ 0(2) + 0(3) + 1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $P(X) = 6 \cdot P_0(X) + 5 \cdot P_1(X) + 1 \cdot P_2(X) = 6(1) + 5(X-1) + 1(X-1)^2$.
Vérification : $6 + 5X - 5 + X^2 - 2X + 1 = X^2 + 3X + 2$. C'est correct.

7.3.3 5.3.3 Égalités polynomiales et changement de base

Une égalité polynomiale $P(X) = Q(X)$ est une identité qui est vraie pour tout X. Si deux polynômes sont égaux, leurs expressions en termes de combinaisons linéaires de n'importe quelle base doivent être identiques. C'est-à-dire, si $P(X) = Q(X)$, alors leurs vecteurs de coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ quelconque sont égaux : $(P)_\mathcal{B} = (Q)_\mathcal{B}$.

Le changement de base permet de réécrire un polynôme (ou une égalité) sous une forme qui peut être plus simple ou plus adaptée à un problème particulier (par exemple, la formule de Taylor pour les polynômes est liée à un changement vers une base de la forme $((X-a)^0, (X-a)^1, \ldots, (X-a)^n)$). Une égalité polynomiale établie dans une base (par exemple, en identifiant les coefficients dans la base canonique) reste valide en soi. Le changement de base sert à exprimer cette même égalité ou ces mêmes polynômes sous une autre "perspective" (par rapport à d'autres polynômes de référence). Par exemple, si $P(X) = Q(X)$, et que l'on exprime $P(X)$ dans la base $\mathcal{B}'$ comme $\sum a'_i P_i(X)$ et $Q(X)$ dans la base $\mathcal{B}'$ comme $\sum b'_i P_i(X)$, alors on aura $a'_i = b'_i$ pour tout i en raison de l'unicité de la décomposition dans une base.

8 Conclusion Générale

Ce cours a couvert les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire, depuis les structures de base des espaces et sous-espaces vectoriels, la notion cruciale de base et de dimension, jusqu'à l'étude des applications linéaires, des endomorphismes et de leur représentation matricielle, sans oublier l'outil essentiel qu'est le changement de base. Ces éléments constituent le socle nécessaire pour aborder des sujets plus avancés tels que la réduction des endomorphismes, les espaces euclidiens, et bien d'autres applications.