Cours Complet et Détaillé sur les Dérivées - Niveau Terminale

Introduction : Pourquoi les Dérivées ?

Imaginez que vous conduisiez une voiture. Votre compteur de vitesse indique à chaque instant à quelle vitesse vous roulez. Cette vitesse instantanée est une *dérivée* : elle décrit comment votre position change à chaque instant. De même, si vous lancez une balle en l'air, sa vitesse change constamment. La dérivée nous permet de comprendre et de quantifier ces changements instantanés.

La notion de dérivée est un concept fondamental en analyse mathématique, et l'une des idées les plus puissantes jamais développées. Elle ne sert pas seulement à tracer des courbes, mais elle est au cœur de nombreuses disciplines scientifiques et techniques. Elle permet de :

- **Modéliser des évolutions :** Comprendre comment une quantité change par rapport à une autre (vitesse, accélération, taux de croissance, etc.).
- **Optimiser des situations :** Trouver la meilleure façon de faire quelque chose, comme minimiser des coûts, maximiser des profits, ou trouver la forme la plus aérodynamique.
- **Approximer des fonctions complexes :** Remplacer localement une courbe compliquée par une droite (sa tangente), ce qui simplifie les calculs.

Ce cours vous guidera pas à pas, depuis les définitions de base jusqu'aux applications, en insistant sur l'intuition derrière chaque concept.

I. Nombre Dérivé et Fonction Dérivée : Le Cœur du Changement

1. Taux d'accroissement : Mesurer une Variation Moyenne

Avant de parler de changement *instantané*, regardons comment mesurer un changement *moyen*. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Prenons deux points distincts sur la courbe de f : le point A d'abscisse a, et un autre point M d'abscisse $a+h$. L'écart horizontal entre ces deux points est h.

- L'ordonnée de A est $f(a)$.
- L'ordonnée de M est $f(a+h)$.

La variation verticale (l'accroissement de f) entre A et M est $f(a+h)-f(a)$. La variation horizontale est $(a+h)-a=h$.

Le **taux d'accroissement** (ou taux de variation moyen) de f entre a et $a+h$ est le rapport de la variation verticale à la variation horizontale :

$$\tau(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique : Ce taux d'accroissement est le **coefficient directeur de la droite sécante** (AM) qui coupe la courbe C_f aux points $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$. Il représente la "pente moyenne" de la fonction entre ces deux points.

Analogie : Si $f(t)$ représente la distance parcourue par une voiture au temps t, alors le taux d'accroissement entre t_1 et $t_2 = t_1 + h$ est $\frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h}$, ce qui correspond à la **vitesse moyenne** de la voiture pendant l'intervalle de temps h.

Exemple : Soit la fonction $f(x) = x^2$. Calculons le taux d'accroissement entre $a = 1$ et $1 + h$. $f(1) = 1^2 = 1$. $f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$.

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + 2h + h^2) - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h}$$

Pour $h \neq 0$ (car M est distinct de A), on peut simplifier par h :

$$\tau(h) = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h$$

Le taux d'accroissement de $f(x) = x^2$ entre 1 et $1 + h$ est $2 + h$. Si $h = 0.1$, $\tau(0.1) = 2.1$. Si $h = 0.01$, $\tau(0.01) = 2.01$.

2. Nombre dérivé en un point : Le Changement Instantané

Que se passe-t-il si on rapproche le point M du point A ? Cela revient à faire tendre h vers 0. La droite sécante (AM) va alors "pivoter" autour de A. Si cette sécante tend vers une position limite, cette position limite est ce qu'on appelle la **tangente** à la courbe en A.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. On dit que f est **dérivable** en a si la limite du taux d'accroissement $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 existe et est un nombre réel fini. Ce nombre réel, qui est la "valeur" vers laquelle tend le taux d'accroissement lorsque h devient infiniment petit, est appelé le **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Intuition : $f'(a)$ représente le taux de variation *instantané* de la fonction f au point a. C'est la "vitesse" à laquelle la fonction change, pile à cet endroit précis.

Une autre notation courante pour le nombre dérivé est $\frac{df}{dx}(a)$ (notation de Leibniz), qui se lit "dérivée de f par rapport à x, évaluée en a".

Exemple (suite) : Pour $f(x) = x^2$ en $a = 1$, le taux d'accroissement est $\tau(h) = 2 + h$. Le nombre dérivé de f en 1 est :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2 + 0 = 2$$

Donc, $f'(1) = 2$. Cela signifie qu'au point d'abscisse 1, la fonction $f(x) = x^2$ varie instantanément à une "vitesse" de 2. Si x augmente un tout petit peu à partir de 1, $f(x)$ augmente environ 2 fois plus.

3. Interprétation géométrique du nombre dérivé : La Tangente

Si une fonction f est dérivable en un point a, alors sa courbe représentative C_f admet une **tangente** au point $A(a, f(a))$. Le **nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur (la pente) de cette tangente**.

La tangente est la droite qui "frôle" la courbe au point A. Elle représente la **meilleure approximation linéaire** de la fonction f au voisinage du point a. Si vous zoomez très fort sur la courbe au point A, elle va de plus en plus ressembler à sa tangente.

L'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est donnée par la formule (point-pente) :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ce qui s'écrit plus couramment :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple (suite) : Pour $f(x) = x^2$ en $a = 1$, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. L'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ au point d'abscisse 1 (c'est-à-dire au point de coordonnées $(1, 1)$) est : $y = 2(x - 1) + 1$
$y = 2x - 2 + 1$
$y = 2x - 1$

Cas particulier : Si $f'(a) = 0$, le coefficient directeur de la tangente est nul. La tangente est donc **horizontale** et son équation est $y = f(a)$. Ces points sont cruciaux pour trouver les sommets (maxima ou minima) d'une courbe.

4. Dérivabilité et Continuité : Liens et Différences

Théorème fondamental : Si une fonction f est dérivable en un réel a, alors f est **continue** en a.

Intuition : Si une courbe admet une tangente bien définie en un point (pas de "cassure" nette, pas de "saut" vertical), cela signifie que la courbe ne peut pas être "interrompue" en ce point. Pour pouvoir "frôler" la courbe avec une droite, il faut que la courbe soit "d'un seul tenant" à cet endroit.

Attention : La réciproque est **fausse**. Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. L'exemple classique est la fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ en $a = 0$.

- **Continuité :** $f(x) = |x|$ est bien continue en 0. $\lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0 = f(0)$. La courbe se trace sans lever le crayon.
- **Dérivabilité :** Calculons le taux d'accroissement en 0 : $\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h}$.
  - Si $h > 0$ (on s'approche de 0 par la droite), $\tau(h) = \frac{h}{h} = 1$. Donc $\lim_{h\to 0^+} \tau(h) = 1$. (Nombre dérivé à droite)
  - Si $h < 0$ (on s'approche de 0 par la gauche), $\tau(h) = \frac{-h}{h} = -1$. Donc $\lim_{h\to 0^-} \tau(h) = -1$. (Nombre dérivé à gauche)

  Les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement sont différentes ($1 \neq -1$). Donc, la limite du taux d'accroissement lorsque $h \to 0$ n'existe pas. Conclusion : $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0. Géométriquement, la courbe de $f(x) = |x|$ présente un "point anguleux" en 0. On ne peut pas y tracer une unique tangente. Il y a une "demi-tangente" à droite de pente 1 et une "demi-tangente" à gauche de pente -1.

5. Fonction dérivée : Une Fonction pour les Pentes

Si une fonction f est dérivable en *chaque* point x d'un intervalle I, on peut définir une nouvelle fonction sur cet intervalle. On appelle **fonction dérivée** de f sur I, notée f' (lire "f prime"), la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x, c'est-à-dire $f'(x)$.

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{array}$$

La fonction dérivée f' nous donne donc la pente de la tangente à la courbe C_f en *n'importe quel point* d'abscisse x de l'intervalle I.

Exemple : Soit $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons $f'(x)$ pour un x quelconque : $\tau(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$. $f'(x) = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$. Donc, la fonction dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$. Si on veut la pente en $x = 1$, $f'(1) = 2(1) = 2$. Si on veut la pente en $x = -3$, $f'(-3) = 2(-3) = -6$. Si on veut la pente en $x = 0$, $f'(0) = 2(0) = 0$ (tangente horizontale).

II. Tableau des Dérivées Usuelles : La Boîte à Outils

Calculer la dérivée à partir de la définition (avec la limite du taux d'accroissement) peut être long. Heureusement, pour les fonctions les plus courantes (dites "usuelles"), les dérivées sont connues. Il est crucial de les mémoriser.

Voici un tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles, ainsi que leurs ensembles de définition D_f et de dérivabilité $D_{f'}$.

Fonction $f(x)$	Ensemble de définition D_f	Dérivée $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité $D_{f'}$	Exemple $f(x)$	$f'(x)$ pour l'exemple
k (constante réelle)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	$f(x) = 7$	$f'(x) = 0$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$ax + b$ (affine)	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$	$f(x) = -2x+5$	$f'(x) = -2$
x^n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}, n \leq -1)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$	$f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$ (non dérivable en 0)	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x (exponentielle base e)	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$\ln(x)$ (logarithme népérien)	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Note sur $\sqrt{x}$: La fonction racine carrée est définie en 0 mais n'y est pas dérivable. La tangente à la courbe en $x = 0$ serait verticale, ce qui correspond à une pente "infinie".

III. Opérations sur les Fonctions Dérivées : Combiner les Outils

Rarement les fonctions se présentent sous une forme simple. Elles sont souvent des sommes, produits, quotients ou composées de fonctions usuelles. Les règles suivantes permettent de dériver ces combinaisons. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel.

Opération	Fonction f	Dérivée $f'(x)$	Condition (si nécessaire)	Intuition/Commentaire
Somme (et Différence)	$u + v$	$u' + v'$		Le taux de variation d'une somme est la somme des taux de variation. Idem pour $u - v \implies u' - v'$.
Multiplication par un réel	$k \cdot u$	$k \cdot u'$		Un facteur constant "multiplie" simplement la variation.
Produit	$u \cdot v$	$u'v + uv'$		Plus complexe : les deux fonctions varient et "interagissent". Ne pas confondre avec $u'v'$!
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ sur I	Cas particulier du quotient avec $u(x) = 1$.
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ sur I	Formule importante, attention à l'ordre et au signe moins.
Puissance d'une fonction	u^n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)	$nu'u^{n-1}$		Règle de la chaîne appliquée à X^n.
Racine carrée d'une fonction	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I	Règle de la chaîne appliquée à $\sqrt{X}$.
Exponentielle d'une fonction	e^u	$u'e^u$		Règle de la chaîne appliquée à e^X.
Logarithme d'une fonction	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ sur I	Règle de la chaîne appliquée à $\ln(X)$.
Fonction composée (général)	$g(u(x))$	$u'(x) \cdot g'(u(x))$	(voir section IV)	La "règle de la chaîne" : on dérive "couche par couche".

Exemples d'application des règles de dérivation :

1. **Dérivée d'une somme :** Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) - 3$. (Définie et dérivable sur $\mathbb{R}$) On pose $u(x) = x^4 \implies u'(x) = 4x^3$. On pose $v(x) = \cos(x) \implies v'(x) = -\sin(x)$. On pose $w(x) = -3 \implies w'(x) = 0$. Alors $f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 4x^3 - \sin(x) + 0 = 4x^3 - \sin(x)$.

2. **Dérivée d'un produit par un réel :** Soit $f(x) = 7e^x$. On pose $k = 7$ et $u(x) = e^x \implies u'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = k \cdot u'(x) = 7e^x$.

3. **Dérivée d'un produit :** Soit $f(x) = x^3 \ln(x)$. (Définie et dérivable sur $(0, +\infty)$) On pose $u(x) = x^3 \implies u'(x) = 3x^2$. On pose $v(x) = \ln(x) \implies v'(x) = \frac{1}{x}$. Alors $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)(\ln(x)) + (x^3)(\frac{1}{x})$
$f'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2 = x^2(3\ln(x) + 1)$.

4. **Dérivée d'un inverse :** Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$. Le dénominateur $v(x) = x^2 + x + 1$ a un discriminant $\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$. Comme le coefficient de x^2 est positif, $v(x)$ est toujours strictement positif, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $v'(x) = 2x + 1$. Alors $f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.
5. **Dérivée d'un quotient :** Soit $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \neq 0$. On pose $u(x) = e^x \implies u'(x) = e^x$. On pose $v(x) = x^2 + 1 \implies v'(x) = 2x$. Alors $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x(x^2+1)-e^x(2x)}{(x^2+1)^2}$
$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.
6. **Dérivée de u^n :** Soit $f(x) = (\sin(x) + 2x)^5$. On pose $u(x) = \sin(x) + 2x \implies u'(x) = \cos(x) + 2$. On a $n = 5$. Alors $f'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1} = 5(\cos(x) + 2)(\sin(x) + 2x)^4$.
7. **Dérivée de $\sqrt{u}$:** Soit $f(x) = \sqrt{e^x + x}$. (Définie et dérivable pour $e^x + x > 0$) On pose $u(x) = e^x + x \implies u'(x) = e^x + 1$. Alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{e^x+1}{2\sqrt{e^x+x}}$.
8. **Dérivée de e^u :** Soit $f(x) = e^{x^3-2x^2+7}$. On pose $u(x) = x^3-2x^2+7 \implies u'(x) = 3x^2-4x$. Alors $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (3x^2 - 4x)e^{x^3-2x^2+7}$.
9. **Dérivée de $\ln(u)$:** Soit $f(x) = \ln(\cos(x))$. (Définie et dérivable pour $\cos(x) > 0$) On pose $u(x) = \cos(x) \implies u'(x) = -\sin(x)$. Alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

IV. Dérivée d'une Fonction Composée (Cas Général) : La Règle de la Chaîne

La dérivation des fonctions comme u^n, $\sqrt{u}$, e^u, $\ln(u)$ sont des applications d'une règle plus générale appelée la **règle de la chaîne** (ou dérivation des fonctions composées).

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J tel que l'image de I par u soit incluse dans J (c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$). Alors la fonction composée $f = g \circ u$, définie par $f(x) = g(u(x))$, est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$f'(x) = (g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$$

Mnémonique : "On dérive la fonction extérieure g (en laissant l'intérieur $u(x)$ intact), puis on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure u."

Intuition de la règle de la chaîne : Imaginez trois variables x, y, z. Supposons que z dépende de y, et y dépende de x. Donc z dépend de x.

- $y = u(x)$
- $z = g(y) = g(u(x))$

Un petit changement Δx en x provoque un changement $\Delta y \approx u'(x)\Delta x$ en y. Ce changement Δy en y provoque un changement $\Delta z \approx g'(y)\Delta y$. Donc, $\Delta z \approx g'(u(x)) \times (u'(x)\Delta x) = (g'(u(x))u'(x))\Delta x$. Le taux de changement de z par rapport à x est $\frac{\Delta z}{\Delta x} \approx g'(u(x))u'(x)$. En passant à la limite, on obtient $(g(u(x)))' = g'(u(x))u'(x)$.

Exemple : Soit $f(x) = \tan(x^2 + 1)$. C'est la composée de :

- Fonction intérieure : $u(x) = x^2 + 1 \implies u'(x) = 2x$.
- Fonction extérieure : $g(X) = \tan(X) \implies g'(X) = 1 + \tan^2(X)$ (ou $\frac{1}{\cos^2(X)}$).

Alors $g'(u(x)) = 1 + \tan^2(x^2 + 1)$. Et $f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x) = (1 + \tan^2(x^2 + 1)) \times (2x) = 2x(1 + \tan^2(x^2 + 1))$.

V. À Quoi Servent les Dérivées ? Applications Concrètes

La dérivée n'est pas juste un exercice de calcul. C'est un outil extraordinairement puissant avec des applications dans de très nombreux domaines.

1. **Physique et Ingénierie :**
   - **Vitesse instantanée :** Si $x(t)$ est la position d'un objet au temps t, alors sa vitesse instantanée est $v(t) = x'(t)$.
   - **Accélération instantanée :** Si $v(t)$ est la vitesse d'un objet au temps t, alors son accélération instantanée est $a(t) = v'(t)$ (c'est donc la dérivée seconde de la position, notée $x''(t)$).
   - **Courant électrique :** L'intensité $i(t)$ du courant est la dérivée de la charge électrique $q(t)$ par rapport au temps : $i(t) = q'(t)$.
   - **Lois de la mécanique, de l'électromagnétisme :** Beaucoup de lois physiques sont exprimées sous forme d'équations différentielles, qui sont des équations impliquant des dérivées.
2. **Économie et Finance :**
   - **Coût marginal :** Si $C(q)$ est le coût total de production de q unités, alors le coût marginal $C_m(q) = C'(q)$ est le coût approximatif de production d'une unité supplémentaire. C'est crucial pour les décisions de production.
   - **Revenu marginal :** Si $R(q)$ est le revenu total pour q unités vendues, $R_m(q) = R'(q)$ est le revenu supplémentaire apporté par la vente d'une unité de plus.
   - **Profit marginal et maximisation du profit :** Le profit $P(q) = R(q) - C(q)$. Pour maximiser le profit, on cherche souvent où $P'(q) = 0$, c'est-à-dire où $R'(q) = C'(q)$ (revenu marginal égal au coût marginal).
   - **Élasticité :** Mesure la sensibilité d'une variable (ex: la demande) à une autre (ex: le prix).
3. **Biologie et Médecine :**
   - **Taux de croissance des populations :** Si $N(t)$ est le nombre d'individus d'une population au temps t, $N'(t)$ est son taux de croissance.
   - **Cinétique des réactions chimiques :** La vitesse d'une réaction chimique est souvent exprimée comme la dérivée de la concentration d'un réactif ou d'un produit.
   - **Débit sanguin, diffusion de médicaments.**
4. **Informatique et Intelligence Artificielle :**
   - **Optimisation d'algorithmes :** Dans l'apprentissage automatique (machine learning), on cherche à minimiser une "fonction de coût" (erreur). Des méthodes comme la "descente de gradient" utilisent les dérivées pour trouver le minimum de cette fonction.
   - **Traitement d'image :** Détection de contours (zones de fort changement de luminosité, donc de forte dérivée).
5. **Géométrie et Étude de fonctions (comme vu ci-dessous) :**

- Déterminer les variations d'une fonction.
- Trouver les maxima et minima (points les plus hauts ou les plus bas).
- Déterminer la convexité et les points d'inflexion (où la courbe change sa "courbure", lié à la dérivée seconde).

En résumé, partout où il y a du **changement** et où l'on veut comprendre ce changement de manière **précise et locale**, les dérivées sont indispensables.

VI. Applications de la Dérivation à l'Étude des Fonctions

1. Sens de variation d'une fonction

C'est l'une des applications les plus directes et les plus importantes de la dérivée. Le signe de la fonction dérivée f' nous donne des informations cruciales sur la manière dont la fonction f se comporte. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points où $f'(x) = 0$), alors f est **strictement croissante** sur I. (Quand la pente est positive, la fonction "monte").
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points où $f'(x) = 0$), alors f est **strictement décroissante** sur I. (Quand la pente est négative, la fonction "descend").
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **constante** sur I. (Quand la pente est nulle partout, la fonction est "plate").

Méthode rigoureuse pour étudier les variations d'une fonction f :

1. **Ensemble de définition :** Déterminer D_f, l'ensemble où f existe.
2. **Dérivabilité et calcul de $f'(x)$:** Justifier que f est dérivable sur un intervalle $D_{f'}$ (souvent D_f ou D_f privé de quelques points) et calculer l'expression de $f'(x)$.
3. **Signe de $f'(x)$:** Étudier le signe de l'expression $f'(x)$ sur $D_{f'}$. Cela implique souvent de résoudre des équations ($f'(x) = 0$) et des inéquations ($f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$).
4. **Tableau de variations :** Dresser un tableau qui récapitule :
   - Les valeurs de x (bornes de $D_{f'}$, valeurs où $f'(x)$ s'annule ou change de signe).
   - Le signe de $f'(x)$ sur les intervalles.
   - Les variations de f (flèche $\nearrow$ pour croissante, $\searrow$ pour décroissante).
   - Les valeurs de $f(x)$ aux points importants (extrema locaux) et les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f.

Exemple : Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 12x$.
3. Signe de $f'(x)$: On factorise $f'(x) = 3x(x-4)$. $f'(x) = 0 \iff 3x(x-4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$. $f'(x)$ est un trinôme du second degré ($ax^2 + bx + c$ avec $a = 3 > 0$). Il est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.
   - $f'(x) > 0$ sur $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

- $f'(x) < 0$ sur $(0, 4)$

4. Tableau de variations : Calcul des valeurs aux points où la dérivée s'annule : $f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 5 = 5$. $f(4) = 4^3 - 6(4)^2 + 5 = 64 - 6(16) + 5 = 64 - 96 + 5 = -27$. Limites aux bornes (pour les polynômes, on regarde le terme de plus haut degré) : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$
			(Max. local)		(Min. local)		

2. Extremum local d'une fonction : Trouver les Sommets et les Creux

Définition :

- f admet un **maximum local** en $x_0 \in D_f$ s'il existe un intervalle ouvert J centré en x_0 (aussi petit soit-il) tel que pour tout $x \in J \cap D_f$, $f(x) \leq f(x_0)$. $f(x_0)$ est alors la valeur de ce maximum local. (C'est un "sommet" de la courbe localement).
- f admet un **minimum local** en $x_0 \in D_f$ s'il existe un intervalle ouvert J centré en x_0 tel que pour tout $x \in J \cap D_f$, $f(x) \geq f(x_0)$. $f(x_0)$ est alors la valeur de ce minimum local. (C'est un "creux" de la courbe localement).
- Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local.

Théorème (Condition nécessaire d'un extremum local) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet un extremum local en un point x_0 de I, alors $f'(x_0) = 0$. Autrement dit, si la fonction atteint un "sommet" ou un "creux" (et que la courbe est "lisse" à cet endroit), alors la tangente à la courbe en ce point doit être horizontale.

Attention : La réciproque est **fausse**. Si $f'(x_0) = 0$, f n'admet pas *nécessairement* un extremum local en x_0. L'exemple classique est $f(x) = x^3$. Sa dérivée est $f'(x) = 3x^2$. On a $f'(0) = 0$. Cependant, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet donc aucun extremum. En $x = 0$, la tangente est horizontale, mais la courbe "traverse" sa tangente : c'est un point d'inflexion à tangente horizontale. Pour qu'il y ait un extremum local en x_0 où $f'(x_0) = 0$, il faut *en plus* que la dérivée f' **change de signe** de part et d'autre de x_0.

Théorème (Condition suffisante d'un extremum local) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$.

- Si $f'(x_0) = 0$ ET si f' change de signe en x_0 en passant de **négatif à positif** (c'est-à-dire $f'(x) < 0$ pour $x < x_0$ proche de x_0, et $f'(x) > 0$ pour $x > x_0$ proche de x_0), alors f admet un **minimum local** en x_0. (La fonction était décroissante, puis devient croissante).
- Si $f'(x_0) = 0$ ET si f' change de signe en x_0 en passant de **positif à négatif** (c'est-à-dire $f'(x) > 0$ pour $x < x_0$ proche de x_0, et $f'(x) < 0$ pour $x > x_0$ proche de x_0), alors f admet un **maximum local** en x_0. (La fonction était croissante, puis devient décroissante).

Exemple (suite) : Pour $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$:

- En $x = 0$, $f'(0) = 0$. À gauche de 0 (par exemple, pour $x = -1$), $f'(-1) = 3(-1)(-1-4) = 3(-1)(-5) = 15 > 0$. À droite de 0 (par exemple, pour $x = 1$), $f'(1) = 3(1)(1-4) = 3(1)(-3) = -9 < 0$. La dérivée f' s'annule en 0 et passe de positive à négative. Donc f admet un **maximum local** en $x = 0$. Ce maximum local est $f(0) = 5$.
- En $x = 4$, $f'(4) = 0$. À gauche de 4 (par exemple, pour $x = 3$), $f'(3) = 3(3)(3-4) = 9(-1) = -9 < 0$. À droite de 4 (par exemple, pour $x = 5$), $f'(5) = 3(5)(5-4) = 15(1) =$

$15 > 0$. La dérivée f' s'annule en 4 et passe de négative à positive. Donc f admet un **minimum local** en $x = 4$. Ce minimum local est $f(4) = -27$.

Ces conclusions sont cohérentes avec le tableau de variations.

Conclusion

La dérivation est bien plus qu'une simple collection de formules ; c'est un langage pour décrire le changement et l'optimisation. En maîtrisant les définitions, les dérivées usuelles, les règles de calcul et leurs interprétations, vous débloquez un outil analytique puissant, essentiel pour l'étude approfondie des fonctions et pour la modélisation de phénomènes dans de multiples disciplines. La clé est la pratique : plus vous ferez d'exercices, plus ces concepts deviendront intuitifs et leur application naturelle.