

# Cours sur les Quadripôles Électriques

Loïc PORTOIS

Septembre 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction aux Quadripôles</b>	<b>2</b>
1.1	Définition et concept . . . . .	2
1.2	Hypothèses fondamentales . . . . .	2
1.2.1	Condition de port . . . . .	2
1.2.2	Hypothèse de linéarité . . . . .	2
1.3	Conventions de signes . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Les Différentes Représentations Matricielles</b>	<b>3</b>
2.1	La Matrice Impédance $[Z]$ (variables indépendantes : $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ ) . . . . .	3
2.2	La Matrice Admittance $[Y]$ (variables indépendantes : $\underline{V}_1, \underline{V}_2$ ) . . . . .	3
2.3	La Matrice Hybride $[H]$ (variables indépendantes : $\underline{I}_1, \underline{V}_2$ ) . . . . .	4
2.4	La Matrice Hybride Inverse $[G]$ (variables indépendantes : $\underline{V}_1, \underline{I}_2$ ) . . . . .	4
2.5	La Matrice de Transfert $[T]$ ou $[ABCD]$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Relations Entre les Matrices de Paramètres</b>	<b>4</b>
3.1	Exemple : Conversion de $[Z]$ en $[Y]$ . . . . .	5
3.2	Principe général et tableau de conversion . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Associations de Quadripôles</b>	<b>5</b>
4.1	Association Série . . . . .	5
4.2	Association Parallèle . . . . .	6
4.3	Association Cascade . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Propriétés d'un quadripôle chargé</b>	<b>7</b>
5.1	Impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ . . . . .	7
5.2	Gain en tension $\underline{G}_v$ . . . . .	8
5.3	Gain en courant $\underline{G}_i$ . . . . .	8
5.4	Impédance de sortie $\underline{Z}_s$ . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Symétrie et Réciprocité</b>	<b>9</b>
6.1	Réciprocité . . . . .	9
6.2	Symétrie . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Exemples d'Application</b>	<b>10</b>
7.1	Exemple 1 : Filtre RC Passe-Bas . . . . .	10
7.2	Exemple 2 : Réseau en T . . . . .	11

# 1 Introduction aux Quadripôles

## 1.1 Définition et concept

En électronique et en théorie des circuits, de nombreux systèmes peuvent être analysés en se concentrant uniquement sur leurs points d'interaction avec l'extérieur, sans avoir besoin de connaître en détail chaque composant interne. C'est l'approche de la **boîte noire**.

Un **quadripôle**, ou *réseau à deux ports*, est la modélisation d'un circuit électrique vu comme une boîte noire possédant quatre bornes, regroupées deux par deux pour former un **port d'entrée** et un **port de sortie**.

- Le **port 1** (ou port d'entrée) est défini par la tension  $\underline{V}_1$  et le courant  $\underline{I}_1$ .
- Le **port 2** (ou port de sortie) est défini par la tension  $\underline{V}_2$  et le courant  $\underline{I}_2$ .

L'objectif de l'étude des quadripôles est de trouver les relations qui lient ces quatre grandeurs ( $\underline{V}_1, \underline{I}_1, \underline{V}_2, \underline{I}_2$ ). Cette approche est extrêmement puissante car elle permet de :

- **Modéliser** des circuits complexes (amplificateurs, filtres, lignes de transmission) de manière simplifiée.
- **Analyser** le comportement d'un système sans connaître sa structure interne exacte.
- **Combiner** des blocs fonctionnels pour construire des systèmes plus complexes (par exemple, en mettant des filtres et des amplificateurs en cascade).

## 1.2 Hypothèses fondamentales

Pour que la modélisation par quadripôle soit valide et simple à manipuler, deux hypothèses majeures sont posées :

### 1.2.1 Condition de port

Pour que les bornes A et B forment un port valide, le courant qui entre par la borne A doit être égal au courant qui sort par la borne B. Autrement dit, il n'y a pas d'accumulation de charge ni de connexion externe autre que par les ports définis.  $I_A^{\text{entrant}} = I_B^{\text{sortant}}$  Cette condition doit être vraie pour le port d'entrée et pour le port de sortie.

### 1.2.2 Hypothèse de linéarité

Le circuit contenu dans le quadripôle est supposé **linéaire** et **invariant dans le temps**. Cela signifie qu'il est composé uniquement de résistances, capacités, inductances et sources commandées linéaires. La conséquence directe est que le **principe de superposition** s'applique. Les relations entre les tensions et les courants seront donc des équations linéaires, ce qui justifie l'utilisation des représentations matricielles.

## 1.3 Conventions de signes

L'orientation des flèches de tension et de courant est cruciale. Plusieurs conventions existent, mais la plus courante en électronique est la **convention récepteur-récepteur**, que nous utiliserons dans ce cours.

- Les courants  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  sont considérés comme **entrants** dans le quadripôle.
- Les tensions  $\underline{V}_1$  et  $\underline{V}_2$  sont définies avec la flèche pointant vers la borne de potentiel le plus haut.

Cette convention est simple à utiliser pour les calculs matriciels. Cependant, il faut être prudent lors de l'interprétation physique : à la sortie, le courant  $\underline{I}_2$  est souvent sortant pour alimenter une charge. Dans ce cas, le courant dans la charge sera  $-\underline{I}_2$ .

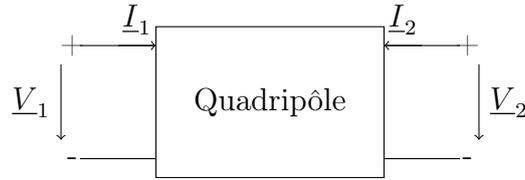


FIGURE 1 – Convention récepteur-récepteur pour un quadripôle.

## 2 Les Différentes Représentations Matricielles

Étant donné que le quadripôle est linéaire, il existe une relation linéaire entre les quatre variables  $\underline{V}_1, \underline{I}_1, \underline{V}_2, \underline{I}_2$ . Comme il y a quatre variables et deux équations indépendantes, on peut choisir deux variables comme indépendantes et exprimer les deux autres en fonction de celles-ci. Il y a  $\binom{4}{2} = 6$  combinaisons possibles, mais seules quatre d'entre elles sont couramment utilisées et mènent aux matrices Z, Y, H et G. La matrice T est un cas un peu différent.

Pour chaque représentation, nous allons expliquer comment déterminer les paramètres en pratique. Cela se fait généralement en appliquant une condition de **circuit ouvert** ( $I = 0$ ) ou de **court-circuit** ( $V = 0$ ) à l'un des ports.

### 2.1 La Matrice Impédance [Z] (variables indépendantes : $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ )

Les tensions sont exprimées en fonction des courants. C'est la représentation la plus naturelle si l'on pense en termes d'impédances.  $\begin{pmatrix} \underline{V}_1 & \underline{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \underline{V}_1 = z_{11}\underline{I}_1 + z_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = z_{21}\underline{I}_1 + z_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$

Les paramètres sont déterminés en laissant l'un des ports en circuit ouvert :

- $z_{11} = \left. \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0}$  : **Impédance d'entrée à sortie ouverte**. C'est l'impédance vue du port 1 lorsque le port 2 est déconnecté.
- $z_{21} = \left. \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0}$  : **Impédance de transfert direct à sortie ouverte**. Elle lie la tension de sortie au courant d'entrée.
- $z_{12} = \left. \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}$  : **Impédance de transfert inverse à entrée ouverte**.
- $z_{22} = \left. \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}$  : **Impédance de sortie à entrée ouverte**.

Cette représentation est particulièrement utile pour l'étude des **associations en série** de quadripôles.

### 2.2 La Matrice Admittance [Y] (variables indépendantes : $\underline{V}_1, \underline{V}_2$ )

C'est la représentation duale de la matrice impédance. Les courants sont exprimés en fonction des tensions.  $\begin{pmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 & \underline{V}_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \underline{I}_1 = y_{11}\underline{V}_1 + y_{12}\underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 = y_{21}\underline{V}_1 + y_{22}\underline{V}_2 \end{cases}$

Les paramètres sont déterminés en mettant l'un des ports en court-circuit :

- $y_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_1} \right|_{\underline{V}_2=0}$  : **Admittance d'entrée à sortie en court-circuit**.
- $y_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_1} \right|_{\underline{V}_2=0}$  : **Admittance de transfert direct à sortie en court-circuit**.
- $y_{12} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_2} \right|_{\underline{V}_1=0}$  : **Admittance de transfert inverse à entrée en court-circuit**.
- $y_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2} \right|_{\underline{V}_1=0}$  : **Admittance de sortie à entrée en court-circuit**.

Cette représentation est idéale pour l'étude des **associations en parallèle**.

## 2.3 La Matrice Hybride [H] (variables indépendantes : $\underline{I}_1, \underline{V}_2$ )

Cette représentation "mélange" les variables, ce qui la rend très utile pour modéliser certains composants comme les transistors.  $(\underline{V}_1 \ \underline{I}_2) = (h_{11} \ h_{12} \ h_{21} \ h_{22}) (\underline{I}_1 \ \underline{V}_2) \iff \begin{cases} \underline{V}_1 = h_{11}\underline{I}_1 + h_{12}\underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 = h_{21}\underline{I}_1 + h_{22}\underline{V}_2 \end{cases}$

Les paramètres sont déterminés par un mélange de conditions de court-circuit et de circuit ouvert :

- $h_{11} = \left. \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{V}_2=0}$  : **Impédance d'entrée à sortie en court-circuit** (Ohm).
- $h_{12} = \left. \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}$  : **Gain en tension inverse à entrée ouverte** (sans dimension).
- $h_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{V}_2=0}$  : **Gain en courant direct à sortie en court-circuit** (sans dimension).
- $h_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}$  : **Admittance de sortie à entrée ouverte** (Siemens).

Les paramètres  $\underline{H}$  sont fondamentaux pour la **modélisation des transistors bipolaires** en régime petits signaux.

## 2.4 La Matrice Hybride Inverse [G] (variables indépendantes : $\underline{V}_1, \underline{I}_2$ )

C'est la représentation duale de la matrice H.  $(\underline{I}_1 \ \underline{V}_2) = (g_{11} \ g_{12} \ g_{21} \ g_{22}) (\underline{V}_1 \ \underline{I}_2) \iff \begin{cases} \underline{I}_1 = g_{11}\underline{V}_1 + g_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = g_{21}\underline{V}_1 + g_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$

## 2.5 La Matrice de Transfert [T] ou [ABCD]

Cette matrice est différente car elle relie les grandeurs d'entrée (port 1) aux grandeurs de sortie (port 2). Elle est donc parfaite pour décrire la *transmission* d'un signal à travers le quadripôle.

Attention à la convention de signe pour le courant de sortie : pour que la matrice T d'une cascade soit le produit des matrices T individuelles, on utilise  $-\underline{I}_2$  (courant sortant).  $(\underline{V}_1 \ \underline{I}_1) = (A \ B \ C \ D) (\underline{V}_2 \ -\underline{I}_2) \iff \begin{cases} \underline{V}_1 = A\underline{V}_2 - B\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C\underline{V}_2 - D\underline{I}_2 \end{cases}$

Les paramètres sont déterminés comme suit :

- $A = \left. \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2} \right|_{\underline{I}_2=0}$  : **Gain en tension inverse à sortie ouverte.**
- $B = \left. \frac{\underline{V}_1}{-\underline{I}_2} \right|_{\underline{V}_2=0}$  : **Impédance de transfert à sortie en court-circuit.**
- $C = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_2} \right|_{\underline{I}_2=0}$  : **Admittance de transfert à sortie ouverte.**
- $D = \left. \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} \right|_{\underline{V}_2=0}$  : **Gain en courant inverse à sortie en court-circuit.**

Cette représentation est indispensable pour l'étude des **associations en cascade**.

## 3 Relations Entre les Matrices de Paramètres

Il est souvent nécessaire de convertir un type de paramètres en un autre. Par exemple, on peut avoir calculé les matrices impédances de deux quadripôles, mais on souhaite les connecter en parallèle, ce qui requiert les matrices admittances.

Le passage d'une représentation à l'autre se fait par manipulation algébrique des systèmes d'équations. Nous allons illustrer cela avec l'exemple le plus direct : la conversion de [Z] vers [Y].

### 3.1 Exemple : Conversion de [Z] en [Y]

La représentation [Z] est donnée par le système :

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = z_{11}\underline{I}_1 + z_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = z_{21}\underline{I}_1 + z_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$$

Notre objectif est d'obtenir la représentation [Y], qui a la forme :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = y_{11}\underline{V}_1 + y_{12}\underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 = y_{21}\underline{V}_1 + y_{22}\underline{V}_2 \end{cases}$$

Pour ce faire, il nous suffit d'inverser le premier système pour exprimer les courants en fonction des tensions. En utilisant la notation matricielle, c'est très simple :

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_1 & \underline{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 & \underline{V}_2 \end{pmatrix}$$

On voit donc directement que  $[Y] = [Z]^{-1}$ . Calculons l'inverse de la matrice [Z] :

$$[Z]^{-1} = \frac{1}{\det([Z])} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} & -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} & -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix}$$

En identifiant les termes avec la matrice [Y], on obtient les relations de conversion :

$$\begin{aligned} - y_{11} &= \frac{z_{22}}{\det([Z])} \\ - y_{12} &= \frac{-z_{12}}{\det([Z])} \\ - y_{21} &= \frac{-z_{21}}{\det([Z])} \\ - y_{22} &= \frac{z_{11}}{\det([Z])} \end{aligned}$$

### 3.2 Principe général et tableau de conversion

Toutes les autres conversions se déduisent de la même manière, en isolant les variables de sortie désirées à partir des équations de départ. Les calculs peuvent être plus ou moins complexes.

Par exemple, pour passer de [Z] à [H], il faudrait manipuler le système d'équations de [Z] pour exprimer  $\underline{V}_1$  et  $\underline{I}_2$  en fonction de  $\underline{I}_1$  et  $\underline{V}_2$ .

Il n'est pas nécessaire de refaire ces calculs à chaque fois. Des tableaux de conversion existent et sont très pratiques. Un tableau complet sera fourni en annexe de ce cours.

## 4 Associations de Quadripôles

La modularité des quadripôles prend tout son sens lorsqu'on les connecte les uns aux autres. Selon le type de connexion, une représentation matricielle particulière simplifie grandement le calcul du quadripôle équivalent.

### 4.1 Association Série

Deux quadripôles sont en série si leurs entrées sont en série et leurs sorties sont en série. Pour que cette connexion soit valide, il faut que la condition de port soit respectée pour chaque quadripôle individuellement après la connexion.

Dans ce montage, les courants d'entrée et de sortie sont les mêmes pour les deux quadripôles ( $I_1 = I_{1a} = I_{1b}$ ,  $I_2 = I_{2a} = I_{2b}$ ), tandis que les tensions s'additionnent ( $V_1 = V_{1a} + V_{1b}$ ,  $V_2 = V_{2a} + V_{2b}$ ). La représentation impédance est donc la plus adaptée.

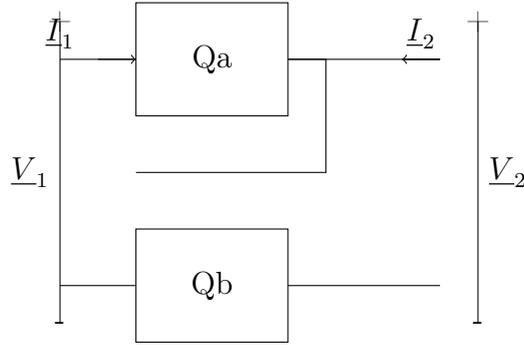


FIGURE 2 – Association de deux quadripôles en série.

$$(\underline{V}_1 \ \underline{V}_2) = (\underline{V}_{1a} \ \underline{V}_{2a}) + (\underline{V}_{1b} \ \underline{V}_{2b}) = [Z_a] (\underline{I}_1 \ \underline{I}_2) + [Z_b] (\underline{I}_1 \ \underline{I}_2) = ([Z_a] + [Z_b]) (\underline{I}_1 \ \underline{I}_2)$$

La matrice impédance équivalente est simplement la somme des matrices impédance individuelles :

$$[Z_{eq}] = [Z_a] + [Z_b]$$

## 4.2 Association Parallèle

Dans une association parallèle, les ports d'entrée sont en parallèle et les ports de sortie sont en parallèle.

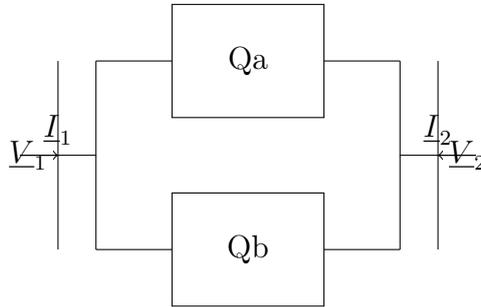


FIGURE 3 – Association de deux quadripôles en parallèle.

Ici, ce sont les tensions qui sont identiques ( $V_1 = V_{1a} = V_{1b}$ ,  $V_2 = V_{2a} = V_{2b}$ ) et les courants qui s'additionnent ( $I_1 = I_{1a} + I_{1b}$ ,  $I_2 = I_{2a} + I_{2b}$ ). La représentation admittance est donc naturelle.

$$(\underline{I}_1 \ \underline{I}_2) = (\underline{I}_{1a} \ \underline{I}_{2a}) + (\underline{I}_{1b} \ \underline{I}_{2b}) = [Y_a] (\underline{V}_1 \ \underline{V}_2) + [Y_b] (\underline{V}_1 \ \underline{V}_2) = ([Y_a] + [Y_b]) (\underline{V}_1 \ \underline{V}_2)$$

La matrice admittance équivalente est la somme des matrices admittance individuelles :

$$[Y_{eq}] = [Y_a] + [Y_b]$$

## 4.3 Association Cascade

C'est l'association la plus fréquente : la sortie d'un quadripôle est connectée à l'entrée du suivant. C'est ainsi que l'on chaîne des filtres, des atténuateurs et des amplificateurs.

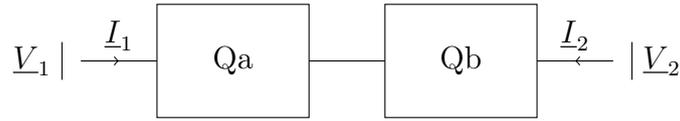


FIGURE 4 – Association de deux quadripôles en cascade.

Les grandeurs de sortie du premier quadripôle ( $V_{2a}, I_{2a}$ ) deviennent les grandeurs d'entrée du second ( $V_{1b}, I_{1b}$ ). En utilisant la matrice de transfert, qui relie l'entrée à la sortie, le calcul devient un simple produit matriciel.

$$(\underline{V}_1 \ \underline{I}_1) = [T_a] (\underline{V}_{2a} \ - \ \underline{I}_{2a}) \quad \text{et} \quad (\underline{V}_{1b} \ \underline{I}_{1b}) = [T_b] (\underline{V}_2 \ - \ \underline{I}_2)$$

Comme  $\underline{V}_{1b} = \underline{V}_{2a}$  et  $\underline{I}_{1b} = -\underline{I}_{2a}$  (attention au signe!), on peut substituer :

$$(\underline{V}_1 \ \underline{I}_1) = [T_a] (\underline{V}_{1b} \ \underline{I}_{1b}) = [T_a] ([T_b] (\underline{V}_2 \ - \ \underline{I}_2)) = ([T_a][T_b]) (\underline{V}_2 \ - \ \underline{I}_2)$$

La matrice de transfert équivalente est le produit (dans le bon ordre!) des matrices de transfert individuelles :

$$[T_{eq}] = [T_a][T_b]$$

## 5 Propriétés d'un quadripôle chargé

En pratique, un quadripôle est rarement utilisé seul. Il est inséré entre un circuit d'attaque (générateur, source) et un circuit d'utilisation (charge). Ses propriétés réelles (gains, impédances) dépendent alors de cette charge et de la source. Le calcul de ces grandeurs est fondamental pour l'analyse de circuits réels.

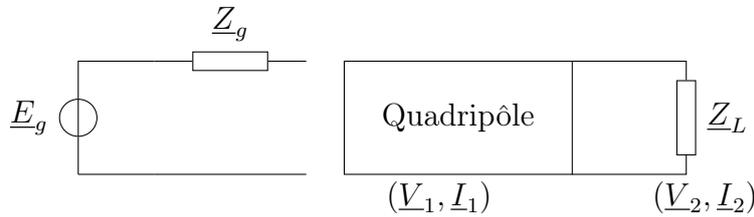


FIGURE 5 – Quadripôle inséré entre un générateur et une charge.

Le quadripôle est alimenté par un générateur de tension de f.e.m.  $\underline{E}_g$  avec une impédance interne  $\underline{Z}_g$ . Il est connecté à une charge d'impédance  $\underline{Z}_L$  à sa sortie. La présence de la charge et de la source impose les relations :

$$\underline{V}_1 = \underline{E}_g - \underline{Z}_g \underline{I}_1 \quad \text{et} \quad \underline{V}_2 = -\underline{Z}_L \underline{I}_2$$

Pour les calculs qui suivent, la matrice de transfert [T] est souvent la plus directe.

### 5.1 Impédance d'entrée $\underline{Z}_e$

C'est l'impédance vue depuis l'entrée du quadripôle, une fois la charge  $\underline{Z}_L$  connectée. Elle est définie par  $\underline{Z}_e = \underline{V}_1 / \underline{I}_1$ . C'est cette impédance que "voit" le générateur.

Partons des équations de la matrice [T] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{V}_1 = A\underline{V}_2 - B\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C\underline{V}_2 - D\underline{I}_2 \end{array} \right.$$

On substitue la relation de la charge  $\underline{V}_2 = -\underline{Z}_L \underline{I}_2$  dans les deux équations :

$$\begin{aligned}\underline{V}_1 &= A(-\underline{Z}_L \underline{I}_2) - B \underline{I}_2 = -(A \underline{Z}_L + B) \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= C(-\underline{Z}_L \underline{I}_2) - D \underline{I}_2 = -(C \underline{Z}_L + D) \underline{I}_2\end{aligned}$$

En faisant le rapport  $\underline{V}_1/\underline{I}_1$ , les termes en  $\underline{I}_2$  s'annulent :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} = \frac{A \underline{Z}_L + B}{C \underline{Z}_L + D}$$

## 5.2 Gain en tension $\underline{G}_v$

C'est le rapport de la tension de sortie sur la tension d'entrée du quadripôle :  $\underline{G}_v = \underline{V}_2/\underline{V}_1$ . En reprenant l'équation pour  $\underline{V}_1$  ci-dessus et la relation de la charge :

$$\underline{V}_1 = (A \underline{Z}_L + B) \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_L}$$

On obtient directement le gain en tension :

$$\underline{G}_v = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{Z}_L}{A \underline{Z}_L + B}$$

## 5.3 Gain en courant $\underline{G}_i$

Le gain en courant est le rapport du courant de sortie sur le courant d'entrée. Pour avoir un gain positif pour un amplificateur non-inverseur, on le définit souvent avec le courant sortant de la charge, soit  $\underline{I}_L = -\underline{I}_2$ . Le gain est donc  $\underline{G}_i = -\underline{I}_2/\underline{I}_1$ .

En utilisant l'équation pour  $\underline{I}_1$  dérivée plus haut :

$$\underline{I}_1 = (C \underline{Z}_L + D)(-\underline{I}_2)$$

On obtient directement le gain en courant :

$$\underline{G}_i = \frac{-\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{1}{C \underline{Z}_L + D}$$

## 5.4 Impédance de sortie $\underline{Z}_s$

C'est l'impédance vue depuis la sortie du quadripôle, en regardant "vers l'arrière", lorsque l'entrée est connectée au générateur (dont la f.e.m. est éteinte, ne laissant que son impédance interne  $\underline{Z}_g$ ). C'est l'impédance vue par la charge.

Pour la calculer, on "éteint" la source de tension du générateur ( $\underline{E}_g = 0$ ), ce qui impose  $\underline{V}_1 = -\underline{Z}_g \underline{I}_1$ . On applique une source de tension de test  $\underline{V}_2$  à la sortie et on calcule le courant  $\underline{I}_2$  qui en résulte.  $\underline{Z}_s$  sera alors  $\underline{V}_2/\underline{I}_2$ .

Des équations de [T], on tire  $\underline{V}_1 = -\underline{Z}_g(C \underline{V}_2 - D \underline{I}_2)$  et on l'injecte dans la première équation :

$$-\underline{Z}_g(C \underline{V}_2 - D \underline{I}_2) = A \underline{V}_2 - B \underline{I}_2$$

On regroupe les termes en  $\underline{V}_2$  et  $\underline{I}_2$  :

$$(D \underline{Z}_g + B) \underline{I}_2 = (A + C \underline{Z}_g) \underline{V}_2$$

Finalement, on obtient l'impédance de sortie :

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_2} = \frac{D \underline{Z}_g + B}{C \underline{Z}_g + A}$$

## 6 Symétrie et Réciprocité

Ces deux propriétés importantes, si elles sont vérifiées, permettent de simplifier l'analyse d'un quadripôle en réduisant le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour le décrire.

### 6.1 Réciprocité

Un quadripôle est dit **réciproque** si la relation entre l'excitation à un port et la réponse à l'autre port est la même, quel que soit le sens de la transmission.

La grande majorité des circuits **passifs** (contenant uniquement des R, L, C et des transformateurs idéaux) sont réciproques. Les circuits contenant des éléments **actifs** (amplificateurs, transistors) ou non-linéaires ne le sont généralement pas.

Formellement, le test de réciprocité est le suivant (illustré en figure 6) : on branche une source de tension  $\underline{V}$  au port 1 et on mesure le courant de court-circuit  $\underline{I}_{cc2}$  au port 2. Ensuite, on fait l'inverse : on branche la même source  $\underline{V}$  au port 2 et on mesure le courant de court-circuit  $\underline{I}_{cc1}$  au port 1. Si le rapport est le même dans les deux cas, le quadripôle est réciproque.

$$\left. \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_2} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_1} \right|_{V_1=0}$$



FIGURE 6 – Test de réciprocité.

La condition de réciprocité se traduit par les relations suivantes sur les paramètres des matrices :

- Matrice  $[Z]$  :  $z_{12} = z_{21}$
- Matrice  $[Y]$  :  $y_{12} = y_{21}$
- Matrice  $[H]$  :  $h_{12} = -h_{21}$
- Matrice  $[G]$  :  $g_{12} = -g_{21}$
- Matrice  $[T]$  :  $\det([T]) = AD - BC = 1$

### 6.2 Symétrie

Un quadripôle est dit **symétrique** si ses propriétés sont inchangées lorsque l'on permute physiquement les ports d'entrée et de sortie. Un quadripôle symétrique se présente de la même manière, qu'on le regarde depuis l'entrée ou la sortie.

Un quadripôle symétrique est **obligatoirement réciproque**. La réciproque n'est pas vraie (un circuit peut être réciproque sans être symétrique).

Par exemple, un filtre en T avec des composants identiques dans les branches séries est symétrique. Un filtre en L ne l'est pas.

La condition de symétrie implique que les impédances d'entrée et de sortie vues à vide ou en charge sont les mêmes. Cela se traduit par les relations suivantes, qui s'ajoutent aux conditions de réciprocité :

- Matrice  $[Z]$  :  $z_{11} = z_{22}$
- Matrice  $[Y]$  :  $y_{11} = y_{22}$
- Matrice  $[H]$  :  $\det([H]) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$
- Matrice  $[G]$  :  $\det([G]) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1$
- Matrice  $[T]$  :  $A = D$

Pour un quadripôle **réciroque et symétrique**, il ne faut donc que deux paramètres indépendants pour le décrire entièrement (par exemple,  $z_{11}$  et  $z_{12}$ ), au lieu de quatre pour un quadripôle quelconque.

## 7 Exemples d'Application

Pour illustrer la puissance de l'approche par quadripôle, analysons deux circuits passifs fondamentaux.

### 7.1 Exemple 1 : Filtre RC Passe-Bas

Considérons le filtre passe-bas le plus simple, composé d'une résistance  $R$  et d'une capacité  $C$ . Son impédance est  $\underline{Z}_C = 1/(jC\omega)$ .

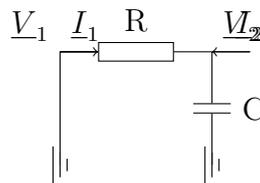


FIGURE 7 – Filtre RC passe-bas vu comme un quadripôle.

Calculons sa matrice de transfert  $[T]$ . Les lois de Kirchhoff pour ce circuit sont :

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= R\underline{I}_1 + \underline{V}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_C} + \underline{I}_2 = jC\omega\underline{V}_2 + \underline{I}_2 \end{aligned}$$

Nous voulons exprimer  $(\underline{V}_1, \underline{I}_1)$  en fonction de  $(\underline{V}_2, -\underline{I}_2)$ . De la deuxième équation, on tire  $\underline{I}_1$  :

$$\underline{I}_1 = (jC\omega)\underline{V}_2 - (1)(-\underline{I}_2)$$

En comparant avec  $\underline{I}_1 = C\underline{V}_2 - D(-\underline{I}_2)$ , on identifie  $C = jC\omega$  et  $D = 1$ .

Substituons  $\underline{I}_1$  dans la première équation :

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= R(jC\omega\underline{V}_2 + \underline{I}_2) + \underline{V}_2 \\ &= (1 + jRC\omega)\underline{V}_2 + R\underline{I}_2 \\ &= (1 + jRC\omega)\underline{V}_2 - R(-\underline{I}_2) \end{aligned}$$

En comparant avec  $\underline{V}_1 = A\underline{V}_2 - B(-\underline{I}_2)$ , on identifie  $A = 1 + jRC\omega$  et  $B = R$ .

La matrice de transfert est donc :

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 + jRC\omega & R \\ jC\omega & 1 \end{pmatrix}$$

À partir de cette matrice, on peut retrouver la fonction de transfert (gain en tension) du filtre lorsqu'il n'est pas chargé ( $\underline{Z}_L \rightarrow \infty$ ). En utilisant la formule  $\underline{G}_v = \underline{Z}_L / (A\underline{Z}_L + B)$ , on voit qu'à la limite où  $\underline{Z}_L$  est très grand, le gain tend vers  $1/A$ .

$$\underline{G}_{v,\text{vide}} = \frac{1}{A} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Ceci est bien la fonction de transfert connue du filtre RC passe-bas.

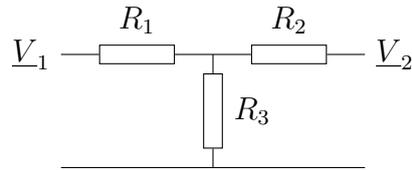


FIGURE 8 – Réseau en T.

## 7.2 Exemple 2 : Réseau en T

Calculons sa matrice impédance  $[Z]$ .

—  $z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$  : Avec  $I_2 = 0$ , on a  $V_1 = (R_1 + R_3)I_1$ . Donc  $z_{11} = R_1 + R_3$ .

—  $z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$  : Avec  $I_2 = 0$ ,  $V_2$  est la tension aux bornes de  $R_3$ , donc  $V_2 = R_3 I_1$ . Donc  $z_{21} = R_3$ .

—  $z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$  : Avec  $I_1 = 0$ , on a  $V_2 = (R_2 + R_3)I_2$ . Donc  $z_{22} = R_2 + R_3$ .

—  $z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$  : Avec  $I_1 = 0$ ,  $V_1$  est la tension aux bornes de  $R_3$ , donc  $V_1 = R_3 I_2$ . Donc  $z_{12} = R_3$ .

La matrice impédance est :

$$[Z] = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $z_{12} = z_{21}$ , donc le quadripôle est **réciproque**, ce qui est attendu d'un circuit passif. Il sera **symétrique** ( $z_{11} = z_{22}$ ) uniquement si  $R_1 = R_2$ .